**Ядрышникова Светлана Борисовна**

**Методические особенности изучения признаков делимости в школьном курсе математики.**

ЕГЭ по математике с 2015 года будет проводиться на базовом и профильном уровнях. Модель ЕГЭ по математике базового уровня предназначена для выпускников, не планирующих продолжать образование в профессиях, предъявляющих специальные требования к уровню математической подготовки. Учитывая, что в настоящее время существенно возрастает роль общематематической подготовки в повседневной жизни и в массовых профессиях, в модели ЕГЭ по математике базового уровня, усилены акценты на контроль способности применять полученные знания на практике, развитие логического мышления. Так, при проведении апробации базового ЕГЭ по математике в октябре 2014 г. была предложена задача, предполагающая осуществление такого контроля:

Задача из варианта № 120912. *Приведите пример шестизначного натурального числа, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делится на 24. В ответе укажите ровно одно такое число*.

Решение.Если число делится на 24, то оно также делится на 3 и на 8.Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры образуют число, которое делится на 8. Перебрав трёхзначные числа из 1 и 2, получим, что только 112 делится на 8. Это число образует последние три цифры искомого числа.

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Последние три цифры 112 дают к сумме 4. Рассмотрим первые три цифры. Их сумма может быть от 3 до 6. Условиям задачи удовлетворяет сумма цифр, равная 5. Троек с данной суммой цифр три: 122, 212, 221.

Таким образом, подходят числа: 122112, 212112, 221112.

Задача требует от выпускника знаний по теме «Делимость натуральных чисел». Статья написана на основе материалов практических занятий с учащимися. Ее цель − поделиться опытом работы автора, который, надеюсь, поможет вам как при проведении уроков, факультативов, так и может быть использована при подготовке к ЕГЭ.

Тема на делимость чисел изучается в 5-6 классах. При изучении этой темы рассматриваются следующие вопросы: делимость натуральных чисел; признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10; простые и составные числа; разложение натурального числа на простые множители; наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное; деление с остатком**.**

Основная цель изучения темы – познакомить учащихся с основными понятиями делимости чисел (делитель, простое число, разложение на множители, признаки делимости), сформировать навыки их использования. При изучении данной темы можно уделять значительное внимание формированию у учащихся простейших доказательных умений. Доказательство свойств и признаков делимости вначале проводятся на характерных числовых примерах, а затем могут быть распространены на общий случай. При этом учащиеся получают первый опыт доказательства теоретических положений со ссылкой на другие теоретические положения.

Пример формирования простейших доказательных умений будет показан на вопросах изучения признаков делимости.Изучению признаков делимости предшествует введение понятий: делимость числа *a* на число *b,* делитель числа *а*.

*Пусть а и b – натуральные числа. Число b называется делителем числа а, если частное от деления а на b является целым числом. В данном случае говорят, что число а делится на число b.*

Признаки делимости на 2, на 5 и на 10 на первоначальном этапе могут быть получены при анализе таблицы умножения.

Формулировке теоремы о делимости произведения предшествует решение следующей задачи: «*Назовите все делители числа* \*\*\*\*0. *Все цифры, кроме последней скрыты, последняя* – 0». После того как доказывается делимость на 2, на 5 и на 10, открывается вторая с конца цифра. Формулируется следующая задача: «Назовите делители числа \*\*\*00». При обсуждении получаем следующие делители: 100, 50, 20, 10, 5, 2, 4, 25.

На примерах показывается

, ; , 1200



,



, и т.д.



Затем открывается третья с конца цифра. Формулируется следующая задача: «*Назовите делители числа* \*\*000». При обсуждении получаем следующие делители: 500, 200, 125, 100, 50, 40, 25, 20, 10, 8,5, 4, 2.

Данная подготовительная работа позволяет выдвинуть гипотезу: «*Если хотя бы один множителей делится на данное число, то и все произведение делится на это число».*

Доказательство данной гипотезы лучше всего проиллюстрировать сначала на примере:

Докажите, что .



Доказательство., , тогда , следовательно, .



Затем записывается теорема о делимости произведения в буквенном виде и доказывается.

*Теорема*. Если , то .



Доказательство.Так как , то , . Тогда следовательно,.



*Задача*. Назовите делители числа .



При решении этой задачи применяем доказанную теорему. К делителям числа*a*равным 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно добавить 6:

;



если продолжить



,



то и числа 18, 21, 24 и 40 также делители числа *а*.

Обоснование признаков делимости на 4, 5 и 8 основывается на свойстве делимости суммы. Используя ранее полученное утверждение о том, что целое число сотен делится на 4, можно методом «проб» сформулировать утверждение: «*Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последнее цифры в его записи образуют число, делящееся на 4»*.

О делимости числа можно судить по делимости его частей: «*Если в сумме каждое слагаемое делится на одно и то же число, то и вся сумма делится на это число»*.

Руководствуясь распределительным законом умножения относительно сложения, можно обосновать последнее утверждение:



Если и, то .



Докажем признак делимости на 5: «*На число 5 делятся те и только те числа, которые оканчиваются нулем или пятеркой»*.Для простоты рассуждений рассмотрим трехзначные числа.

Доказательство. Пусть − трехзначное число, делящееся на 5. Представим его как сумму



*.*



10 делится на 5, значит, число делится на 5. Тогда и второе слагаемое – число единиц – должно делится на 5. Отсюда следует, что-либо *z*=0, либо*z*=5.



Обоснование признаков делимости на 9 и на 3 строится на использовании остатков от деления разрядных единиц на 9:

,



,



,



,



,



,



,



,



,



.



*Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.*

В заключении можно предложить ученикам сформулировать признаки делимости на 6, на 12, на14, на 15: «На число 6 делятся только те числа, которые делятся и на 2, и на 3», «На число 12 делятся только те числа, которыеделятся и на 3, и на 4», «На число 14 делятся только те числа, которые делятся и на2, и на 7», «На число 15 делятся только те числа, которые делятся и на 3, и на 5».

Примеры задач, при решении которых применяются рассмотренные признаки и свойства делимости

*Задача1*. *История с покупателем.*Покупатель подошел к кассе и сказал: «Я взял 2 пачки соли по 9 пенсов, 2 булки хлеба по 36 пенсов, 3 пачки сахара и 6 пирожных. Цена сахара и пирожных мне неизвестна». Кассир выбил чек на 4 фунта 6 шиллингов и 1 пенс. Покупатель заявил, что кассир ошибся. Прав ли покупатель? (1 фунт стерлингов= 20 шиллингов; 1 шиллинг=12 пенсов).

*Задача2*.*Секрет фокусника.*Фокусник раздает зрителям по набору карточек с цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Карточки в каждом наборе расположены по порядку.

*Фокус 1.*Желающие составляют числа из первых четырех карточек. Фокусник объявляет, что ни одно из составленных чисел не делится на 3.

Рискует ли фокусник ошибиться?

*Фокус 2.*Фокусник предлагает взять следующую по порядку карточку и вновь составить число уже из пяти карточек. Не глядя, фокусник объявляет, что составленное число не делится на 3.

Почему он в этом уверен?

*Фокус 3.*Желающие составляют числа, используя весь набор карточек. Фокусник «угадывает», что каждое из составленных чисел кратно числу 9

Раскройте этот секрет. Придумайте свои фокусы.

*Задача3.Игра «Угадайка».*Вам наверняка больше 9 лет и, конечно, меньше 100. Запишите число ваших полных лет три раза подряд в строчку.

Например, если мне 23 года, я запишу 23 подряд три раза и получу шестизначное число 232323, которое делится на 7.

Объясните, почему (не деля это число на7).

*Задача4.*Сколько нулей будет в конце произведения чисел

?



*Задача5*. Какое частное и какой остаток дает число



при делении на 75?

*Задача6*.Туристическое агентство «Дуремар» предложило Карабасу три путевки «в страну Дураков» − две взрослые и одну детскую за 3543 золотые монеты. Известно, что детская путевка на 500 золотых монет дешевле. Каким образом Карабас смог понять, что его обманывают?

*Задача*7.Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9, 11. (Ответ: 8910)

Задачи по теме делимость чисел способствуют развитию познавательного интереса, логического мышления. Вернемся к задачам модели ЕГЭ по математике базового уровня. Эти задачи можно использовать на уроках, во внеурочной работе. Приведем задачи из сборника [4]:

*Задача8.*Вычеркните в числе 123456 три цифры так, чтобы получившееся трёхзначное число делилось на 27. В ответе укажите получившееся число.

Решение. Если число делится на 27, тогда оно делится на 3 и на 9. Число делится на 9, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3. Заметим, что, если число делится на 9,то оно делится и на 3. Сумма цифр числа 123456 равна1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Вычеркнув числа 2, 4 и 6 получим, число, сумма цифр которого равна девяти. Девять делится на девять.

Ответ: 135.

*Задача9.* Произведение десяти идущих подряд чисел разделили на 7. Чему может быть равен остаток?

Решение. Среди 10 подряд идущих чисел одно из них обязательно будет делиться на 7, поэтому произведение этих чисел кратно семи. Следовательно, остаток от деления на 7 равен нулю.

Ответ: 0.

*Задача10.* Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 110 квартир?

Решение. Число квартир, этажей и подъездов может быть только целым числом. Заметим, что число 110 делится на 2, 5 и 11. Следовательно, в доме должно быть 2 подъезда, 5 квартир на этаже и 11 этажей.

Ответ: 11.

В завершении занятия можно привести старинную легенду.

Давным-давно жил-был старик, который, умирая, оставил своим трем сыновьям 19 верблюдов. Он завещал старшему сыну половину, среднему – четвертую часть, а младшему – пятую. Не сумев найти решения самостоятельно (ведь задача в «целых верблюдах» решения не имеет), братья обратились к мудрецу.

- О, мудрец!- сказал старший брат. - Отец оставил нам 19 верблюдов и велел разделить между собой: старшему – половину, среднему – четверть, младшему – пятую часть. Но 19 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 5. Можешь ли ты, о, достопочтенный, помочь нашему горю, ибо мы хотим выполнить волю отца?

- Нет ничего проще, - ответил им мудрец. – Возьмите моего верблюда и идите домой.

Братья дома легко разделили 20 верблюдов пополам, на 4 и на 5.Старший брат получил 10, средний – 5, а младший – 4 верблюда. При этом один верблюд остался (10+5+4=19). Раздосадованные, братья вернулись к мудрецу и пожаловались:

- О, мудрец, опять мы не выполнили волю отца! Вот этот верблюд – лишний.

- Это не лишний, - сказал мудрец,- это мой верблюд. Верните его и идите домой.

**Библиографический список**

1. Э.Г.Гельфман, Е.Ф.Бек, Ю.Ю.Вольфенгаут, С.Я.Гришпон, Л.Н.Демидова, Н.Б.Лобатенко. Дело о делимости и другие рассказы: Учебное пособие по математике для 6-го класса. – Томск: Изд-во Том.ун-та, 1996. − 176с.
2. Программы общеобразовательных учреждений. Математика. 5-6 классы. - Бурмистрова Т.А. М :Изд-во Просвещение, 2009
3. Решу ЕГЭ. – URL: <http://mathb.reshuege.ru/>
4. Типовые тестовые задания по математике / Под ред. И. В. Ященко. − М., 2015.